Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 4 im Sommersemester 2021 (am 7.05.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

14.1 Die Struktur der kommutativen algebraischen Gruppen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Ergebnissen zur Theorie der kommutativen linearen algebraischen Gruppen, welche grundlegend sind für die in den nachfolgenden Kapiteln dargelegte Theorie. Die besonders wichtigen Tori werden in 14.2 eingeführt und in 14.4.9 beweissen wir den Klassifikationssatz für zusammenhängende eindimensionale Gruppen. Wir verwenden die Bezeichnungen der vorangehenden Kapitel.

14.1.1 Satz: Produkt-Zerlegung der kommutativen algebraischen Gruppen

Sei G eine kommutative lineare algebraische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Mengen G_s und G_u der halbeinfachen bzw. unipotenten Elemente von G sind abgeschlossene Untergruppen von G.

(ii) Die Produkt-Abbildung $\pi: G_s \times G_u \longrightarrow G$, $(x,y) \mapsto x \bullet y$, ist ein Isomorphismus von algebraischen Gruppen.

Beweis. Zu (i). Wir können annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathbf{GL}_n$.

1. Schritt. G_s ist eine abgeschlossene Untergruppe von G..

Für je zwei Elemente $g, h \in G$ betrachten wir die Jordan-Zerlegungen

$$g = g_s \bullet g_u \text{ und } h = h_s \bullet h_u$$

in G. Dies sind gleichzeitig die Jordan-Zerlegungen in $\mathbf{GL}_n$. Weil je zwei Elemente von G_s kommutieren, gibt es ein Element $\xi \in \mathbf{GL}_n$ mit

$$\xi \bullet G_s \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{D}_n$$

(WS.20.9, 12.3 (ii) oder 2.4.2.A (ii)), d.h. $\xi \bullet G_s \bullet \xi^{-1}$ besteht aus Diagonal-Matrizen,

$$\xi \bullet G_s \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{D}_n.$$

Es folgt

$$G_s \subseteq \xi^{-1} \bullet \mathbf{D}_n \bullet \xi \bigcap G.$$

Umgekehrt ist jedes Element aus dem Durchschnitt rechts eine halbeinfache Matrix von $\mathbf{GL}_n$ die in G liegt, also ein halbeinfaches Element von G. Es gilt also sogar

$$G_s = \xi^{-1} \bullet \mathbf{D}_s \bullet \xi \bigcap G.$$

Weil $\xi^{-1} \bullet \mathbf{D}_n \bullet \xi$ abgeschlossen ist in $\mathbf{GL}_n$ steht aber auf der rechten Seite eine abgeschlossene Untergruppe von G.

2. Schritt. G_u ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Für je zwei Elemente $g, h \in G$ betrachten wir die Jordan-Zerlegungen

$$g = g_s \bullet g_u \text{ und } h = h_s \bullet h_u$$

in G. Dies sind gleichzeitig die Jordan-Zerlegungen in $\mathbf{GL}_n$. Weil je zwei Elemente von G_u kommutieren, gibt es ein Element $\xi \in \mathbf{GL}_n$ mit

$$\xi \bullet G_u \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{T}_n$$

(WS 20.9, 12.3(i) oder 2.4.2.A (i)), d.h. $\xi \bullet G_u \bullet \xi^{-1}$ besteht aus unipotenten oberen Dreiecksmatrizen,

$$\xi \bullet G_u \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{U}_n.$$

Es folgt

$$G_u \subseteq \xi^{-1} \bullet \mathbf{U}_n \bullet \xi \bigcap G.$$

Umgekehrt ist jedes Element aus dem Durchschnitt rechts ein unipotente Matrix von $\mathbf{GL}_n$ die in G liegt, also ein unipotentes Element von G. Es gilt also sogar

$$G_u = \xi^{-1} \bullet \mathbf{U}_n \bullet \xi \bigcap G.$$

Weil $\xi^{-1} \bullet \mathbf{U}_n \bullet \xi$ abgeschlossen ist in $\mathbf{GL}_n$ steht aber auf der rechten Seite eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Zu (ii). In der neunten Vorlesung des vergangenen Semesters haben wir eine Aussage über Mengen $S \subseteq \mathbf{M}_n$ von kommutierenden n×n-Matrizen bewiesen (vgl. WS 20.9, 21.3), nach welcher es ein $x \in \mathbf{GL}_n$ gibt, für welches xSx^{-1} aus oberen Dreiecksmatrizen besteht. Wir haben dort außerdem gezeigt, man x so wählen, daß xSx^{-1} aus Diagonal-Matrizen besteht, wenn die Elemente von S halbeinfach sind. Zum Beweis von (ii) benötigen wir die folgende etwas stärkere Aussage.

Lemma
Sei

$$S \subseteq \mathbf{M}_n$$

eine Menge von Matrizen, von denen je zwei miteinander kommutieren und

$$T \subseteq S$$

eine (möglicherweise leere) Teilmenge aus halbeinfachen Matrizen. Dann gibt es ein

$$x \in \mathbf{GL}_n$$

mit

$$xSx^{-1} \subseteq \mathbf{T}_n \text{ und } xSx^{-1} \subseteq \mathbf{D}_n.$$

Ich möchte hier auf einen Beweis des Lemmas verzichten. Er ist so ähnlich wie der der Aussage von Vorlesung 9. Die Einzelheiten findet man in 2.4.2 A und 2.4.2 B.

Die Abbilung

$$\pi: G_s \times G_u \longrightarrow G, (x,y) \mapsto x \bullet y,$$

ist surjektiv auf Grund der Existenz der Jordan-Zerlegung und injektiv auf Grund von deren Eindeutigkeit (vgl. 2.4.8 (i)). Als Einschränkung der Gruppen-Multiplikation

$$G \times G \longrightarrow G, (x,y) \mapsto x \bullet y,$$

ist π eine reguläre Abbildung. Die Umkehrung von π ist gegeben durch

$$G \longrightarrow G_s \times G_u, g \mapsto (g_s, g_u).$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die Koordinatenfunktionen dieser Umkehrung regulär sind. Dazu reicht es zu zeigen, die Abbildung

$$G \longrightarrow G_s, g \mapsto g_s, \tag{3}$$

ist regulär (denn dann hängt auch $g_u = g \bullet g_s^{-1}$ in regulärer Weise von g ab). Suchen wir also nach einer geeigneten Beschreibung von g_s als Funktion von g. Weil je zwei Elemente von G kommutieren und alle Elemente von $G_s \subseteq G$ halbeinfach sind, gibt es nach dem obigen Lemma ein Element $\xi \in \mathbf{GL}_n$ mit

$$\xi \bullet G \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{T}_n \text{ und } \xi \bullet G_s \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{D}_n$$

Indem wir die gewählte Einbettung von G in $\mathbf{GL}_n$ um den inneren Automorphismus bezüglich ξ abänderen, erreichen wir

$$G \subseteq \mathbf{T}_n \text{ und } \xi \bullet G_s \bullet \xi^{-1} \subseteq \mathbf{D}_n \ (\subseteq \mathbf{T}_n \subseteq \mathbf{GL}_n). \tag{4}$$

Betrachten wir die Jordan-Zerlegung

$$g = g_s \bullet g_u$$

eines Elements $g \in G$. Dies ist gleichzeitig aus die Jordan-Zerlegung von g in $\mathbf{GL}_n$ (weil die natürliche Einbettung $G \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ ein Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen ist). Wegen (4) ist

$$g_s$$

eine Diagonal-Matrix und

$$g_u$$

eine unipotenten obere Dreiecksmatrix, d.h. $n = g_u - 1$ ist nilpotente obere Dreiecksmatrix, also eine obere Dreieckmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 0 sind. Wir erhalten

$$g = g_s \bullet (1+n) = g_s + g_s \bullet n.$$

Der zweite Summand ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix, welche nilpotent ist (weil g_s und n kommutieren). Die Einträge auf der Hauptdiagonalen von $g_s \bullet n$ sind gleich Null, d.h. g und g_s haben dieselbe Hauptdiagonale, d.h.

$$g_s$$

ist die Diagonal-Matrix, der Hauptdialgonale gleich der von g ist. Insbesondere sind die Einträge von g_s reguläre Funktionen der Einträge von g, d.h. die Abbildung

$$G \longrightarrow G_s,\ g \mapsto g_s$$

ist regulär.
QED.

14.1.2 Folgerung: Erhaltung des Zusammenhangs beim Übergang zum halbeinfachen bzw. unipotenten Teil

Ist G eine zusammenhängende kommutative lineare algebraische Gruppe, so gilt dasselbe für deren halbeinfachen und unipotenten Teile G_s und G_u.

Beweis. Die Zusammensetzungen des Inversen

$$\pi^{-1}: G \longrightarrow G_s \times G_u$$

des Isomorphismus von 14.1.1 (ii) mit den Projektionen auf die beiden Faktoren, sind surjektive reguläre Abbildungen

$$G \longrightarrow G_s \text{ und } G \longrightarrow G_u.$$

Mit G sind aber auch die beiden stetigen (weil regulären) Bilder von G zusammenhängend.
QED.

14.1.3 Proposition: der zusammenhängende Fall der Dimension 1

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe der Dimension 1,

$$\dim G = 1.$$

Dann gelten folgende Aussagen.
(i) G ist kommutativ.
(ii) $G = G_s$ oder $G = G_u$.
(iii) Ist G unipotent und ist der Grundkörper k von positiver Charakteristik,

$$p := \mathrm{Char}(k) > 0,$$

so ist jedes Element von $G - \{e\}$ von der Ordnung p.

Beweis. Zu (i). Sei

$$g \in G.$$

Wir betrachten die reguläre Abbildung

$$\phi: G \longrightarrow G,\ x \mapsto xgx^{-1}.$$

Mit G ist auch $\overline{\phi(G)}$ irreduzibel (nach 1.2.3 (i) und (ii)). Damit gilt

$$\overline{\phi(G)} = G \text{ oder } \dim \overline{\phi(G)} < \dim G = 1$$

(nach 1.8.2). Im zweiten Fall ist $\overline{\phi(G)}$ als 0-dimensionale zusammenhängende Menge einpunktig. Weil $g = \phi(e)$ in dieser Menge liegt, gilt also

$$\overline{\phi(G)} = G \text{ oder } \overline{\phi(G)} = \{g\}.$$

Nehmen wir an, es tritt der erste Fall ein,

$$\overline{\phi(G)} = G.$$

Weil $\phi(G)$ eine in G offene Teilmenge enthält (nach 1.9.5), d.h. eine Menge mit endlichem Komplement (wegen $\dim G = 1$)[1], ist auch

---

[1] $G - \phi(G)$ enthält eine echte abgeschlossene Teilmenge von G. Weil G irreduzibel ist, gilt

$$\dim G - \phi(G) < \dim G = 1$$

(nach 1.8.2). Also ist $G - \phi(G)$ leer oder es ist

$$\dim (G - \phi(G)) = 0.$$

$$G - \phi(G) \text{ endlich.}$$

Wir können annehmen, daß G eine abgeschlossene Untergruppe vom $\mathbf{GL}_n$ ist (nach 2.3.7(i)). Die Einschränkung des für die Matrizen von $\mathbf{GL}_n$ definierten charakteristischen Polynoms auf G,

$$\det (T \cdot 1 - y) \text{ mit } y \in G \subseteq \mathbf{GL}_n$$

ist auf jeder Konjugationsklasse konstant, also insbesondere auf $\phi(G)$. Weil das Komplement von $\phi(G)$ in G endlich ist, ist die Menge

$$\{ \det (T \cdot 1 - y) \mid y \in G \}$$

endlich. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind somit reguläre Funktionen

$$G \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

mit nur endlich vielen Werten. Weil G zusammenhängend ist, ist auch jedes Bild von G bei einer regulären Abbildung zusammenhängend. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind damit konstante Funktionen auf G, d.h. $\det (T \cdot 1 - y)$ ist unabhängig von $y \in G$. Es folgt

$$\chi_y(T) = \det (T \cdot 1 - y) = \det (T \cdot 1 - e) = (T-1)^n.$$

Nach dem Satz von Caley-Hemilton gilt

$$0 = \chi_y(y) = (y - 1)^n \text{ für jedes } y \in G.$$

Mit anderen Worten, G ist eine unipotente Gruppe. Als solche ist G auflösbar (nach SS 21 3, 13.5 oder 2.4.13 B). Insbesondere gibt es einen iterierten Kommutator von G, welcher trivial ist,

$$G^{(\ell)} = \{e\} \text{ für eine natürliche Zahl } \ell$$

(vgl. Bemerkrung 2.4.13 A (iv)). Zur Erinnerung

$$G^{(0)} := G,\ G^{(1)} := (G, G),\ G^{(i+1)} := (G^{(i)}, G^{(i)}).$$

Das ist nur möglich, wenn der Kommutator von G echt enthalten ist in G,

$$(G, G) \subset G.$$

Nun ist (G, G) eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von G (nach 2.2.8(i)). Insbesondere gilt $\dim (G,G) < \dim G = 1$ (nach 1.8.2), also $\dim (G,G) = 0$, d.h. (G,G) ist endlich und als irrreduzible Varietät sogar einpunktig. Es gilt also

$$(G, G) = \{e\}.$$

Nach Definition von ϕ gilt aber $g^{-1}\phi(G) \subseteq (G, G)$, also $g^{-1}\phi(G) = \{e\}$. Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme $\overline{\phi(G)} = G$. Diese ist somit falsch, und es gilt

$$\phi(G) \subseteq \overline{\phi(G)} = \{g\},$$

also $g = \phi(x) = xgx^{-1}$ für jedes $x \in G$, also

$$gx = xg \text{ für beliebige } x, g \in G.$$

Die Gruppe G ist kommutativ, wie behauptet.

Zu (ii). Weil G kommutativ ist, gilt

$$G \cong G_s \times G_u$$

(vgl. diese Vorlesung 14.1.1(ii) oder 3.1.1(ii)), wobei G_s imd G_u zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen sind (vgl. diese Vorleseung 14.1.1 (i) oder 3.1.1 (i) und 3.1.2). Eine der beiden Untergruppen hat damit die Dimension 1 und die andere die

---

Eine affine irreduzible Varietät der Dimension 0 ist eine einpunktige Menge. Da die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $G-\phi(G)$ endlich ist, ist $G-\phi(G)$ eine endliche Menge.

Dimension 0 (nach 1.8.3). Die 0-dimensionale Untergruppe ist trivial (weil sie zusammenhängend ist). Damit gilt Aussage (ii).
Zu (iii). Wir betrachten die Untergruppen

$$<G^{p^k}>$$

von G, welche von den p^k-ten Potenzen der Elemente von G erzeugt werden. Es sind abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppen von G (nach 2.2.5(ii) und 2.2.9 Aufgabe 3). Wegen dim G = 1 sind diese Untergruppen gleich G oder gleich {e},

$$<G^{p^k}> = G \text{ oder } <G^{p^k}> = \{e\}.$$

Wir können annehmen, daß G eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathbf{GL}_n$ ist (nach 2.3.7). Weil G nach Voraussetzung unipotent ist, können wir sogar annehmen, G ist abgeschlossenen Untergruppe der Gruppe $\mathbf{U}_n$ der oberen Dreiecksmatrizen, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind,

$$G \subseteq \mathbf{U}_n$$

(nach 2.4.12 B). Die Elemente der Gruppe G haben die Gestalt

$$g = 1 + n$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix n, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 0 sind. Weil die Charakteristik des Grundkörpers k gleich p ist und die Matrizen 1 und n kommutieren, gilt

$$g^p = (1+n)^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \cdot n^i = 1 + n^p.$$

Wir iterieren diese Identität und erhalten

$$g^{p^k} = 1 + n^{p^k}.$$

Der zweite Summand rechts ist jedoch gleich 0 für $p^k \geq n$ (vgl. Formel (5) im dritten Schritt des Beweises zu Aufgabe 4 von 2.1.5). Also gilt

$$<G^{p^k}> = \{e\} \text{ für } p^k \geq n.$$

Damit ist der Fall $< G^p > = G$ ausgeschlossen, d.h. es ist

$$< G^p > = \{e\},$$

wie behauptet.
QED.
Bemerkung
Im Rest dieses Kapitels untersuchen wir zunächst die kommutativen linearen algebraischen Gruppen, deren Elemente halbeinfach sind, und anschließend diejenigen, welche der Bedingung von 14.1.3 dieser Vorlesung (vgl. 3.1.3 (iii)) genügen.

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori

14.2.1 Charaktere, Kocharaktere, Diagonalisierbarkeit

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$\chi: G \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

heißt rationaler Charakter oder auch einfach Charakter von G. Die Menge der rationalen Charaktere von G wird mit

$$\mathbf{X}^*(G)$$

bezeichnet. Ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$\lambda: \mathbf{G}_m \longrightarrow G$$

heißt Kocharakter von G oder auch multiplikative einparametrische Untergruppe von G. Die Menge der Kocharaktere von G wird mit

$$\mathbf{X}_*(G)$$

bezeichnet.
Eine lineare algebraische Gruppe heißt diagonalisierbar, wenn sie isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer der Gruppen $\mathbf{D}_n$ (der n×n-Diagonalmatrizen über k, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (b)). Ist sie isomorph zu einer der Gruppen $\mathbf{D}_n$, so heißt sie auch algebraischer Torus.[2]

Bemerkungen

(i) Die Menge $\mathbf{X}^*(G)$ besitzt bezüglich der Multiplikation von Abbildungen mit Werten in der abelschen Gruppe $\mathbf{G}_m$ selbst die Struktur einer abelschen Gruppe.
Wir vereinbaren, die Operation dieser Gruppe additiv zu schreiben.

(ii) Nach Definition sind die Charaktere von G reguläre Funktionen auf G, d.h. Elemente des Koordinatenrings,

$$X^*(G) \subseteq k[G].$$

Nach dem Satz von Artin (vgl. Lang [2], Kapitel VIII, §4, Theorem 7) sind die Charaktere k-linear unabhängige Elemente von k[G].

(iii) Ist die lineare algebraische Gruppe G kommutativ, so besitzt

$$\mathbf{X}_*(G)$$

bezüglich der Multiplikation von Abbildungen mit Werten in der Gruppe G die Struktur eine abelschen Gruppe. Wir vereinbaren dann, die Operation dieser Gruppe additiv zu schreiben.

(iv) Ist die lineare algebraische Gruppe nicht-notwendig kommutativ, so denken wir uns

$$\mathbf{X}_*(G)$$

stets mit der Multiplikation mit ganzen Zahlen versehen[3],

$$<\ ,\ >:\mathbb{Z} \times \mathbf{X}_*(G) \longrightarrow \mathbf{X}_*(G),\ (n, \lambda) \mapsto (x \mapsto <n, \lambda>(x) := \lambda(x)^n).$$

Index

—1—

1-parametrische Untergruppe
multiplikative, 7

— A —

algebraischer Torus, 7

—C—

Charakter
rationaler, einer linearen algebraischen Gruppe, 6
Charakter einer linearen algebraischen Gruppe, 6

—D—

diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe, 7

—E—

einparametrische Untergruppe
multiplikative, 7

---

[2] Die algebraischen Tori sind nicht zu verwechseln mit den geometrischen Tori, welche projektive algebraische Gruppen sind (und damit außer in der Dimension 0 keine linearen algebraischen Gruppen, vgl. Mumford [1]).

[3] Dabei betrachten wir die Elemente von $\mathbf{X}_*(G)$ als Abbildungen $k^* \longrightarrow G$.

—G—

Gruppe
diagonalisierbare lineare algebraische, 7

—K—

Kocharakter einer linearen algebraischen Gruppe, 7

—L—

lineare algebraische Gruppe
diagonalisierbare, 7

—M—

multiplikative einparametrische Untergruppe, 7

—R—

rationaler Charakter einer linearen algebraischen Gruppe, 6

—T—

Torus
algebraischer, 7

—U—

Untergruppe
multiplikative einparametrische, 7

—V—

Vereinbarung
additive Schreibweise der Charatkergruppe, 7
additive Schreibweise der Kocharatkergruppe im abelschen Fall, 7

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

14 KOMMUTATIVE LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

14.1 Die Struktur der kommutativen algebraischen Gruppen 1
14.1.1 Satz: Produkt-Zerlegung der kommutativen algebraischen Gruppen 1
14.1.2 Folgerung: Erhaltung des Zusammenhangs beim Übergang zum halbeinfachen bzw. unipotenten Teil 4
14.1.3 Proposition: der zusammenhängende Fall der Dimension 1 4

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori 6
14.2.1 Charaktere, Kocharaktere, Diagonalisierbarkeit 6

INDEX 7

INHALT 8